ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES Option M et P'

DURÉE : 2 heures

Préambule

Le but du problème est l'étude d'un algorithme, donnant le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A. On admet dans la suite les formules de Newton. Soit n un entier naturel, non nul, et $P_n(X)$, un polynôme unitaire, à coefficients réels, de degré n dont les racines sont notées $x_1, x_2, \ldots x_n$, défini par :

$$P_n(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - a_2 X^{n-2} - \ldots - a_{n-1} X - a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

On note pour tout entier $k \geqslant 1$, $S_k = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^k$; les formules de Newton permettent de calculer S_k à l'aide des coefficients du polynôme $P_n(X)$: $a_1 - S_1 = 0$ et pour tout entier $k \in [2, n]$:

$$ka_k + a_{k-1} S_1 + a_{k-2} S_2 + \ldots + a_1 S_{k-1} - S_k = 0.$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. On note $P_A(X)$, le polynôme caractéristique de A et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ses racines. Ainsi, $P_A(X) = \det(A - XI) = (-1)^n [X^n - a_1 X^{n-1} - \ldots - a_n]$.

I. Algorithme

I.1. Montrer que pour tout k entier naturel de $[1, n]$ on a : $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^k = S_k$ où $\mathrm{Tr}(A^k)$ désigne la trace de la matrice A^k.

I.2. Soit I la matrice identité, carrée d'ordre n. On définit la suite de R, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et la suite de matrices carrées d'ordre n, $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par : $B_1 = A$, et pour tout $k \geqslant 1$,

$$u_k = \frac{\mathrm{Tr}(B_k)}{k}, \quad B_{k+1} = (B_k - u_k I) A.$$

Montrer que pour tout k naturel de $[1, n]$, $u_k = a_k$ et $B_k = A^k - \sum_{i=1}^{k-1} u_k A^i$.

I.3. Montrer que $B_{n+1} = 0$, 0 désigne la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont nuls.

I.4. Montrer que si A est inversible, l'inverse de A noté A^{-1} est donné par : $A^{-1} = \frac{B_{n-1} - u_{n-1} I}{u_n}$.

II. Programmation en Pascal

On dispose d'une constante fixant la valeur de n, du type Mat=ARRAY[1..n,1..n]of REAL qui sert à définir les matrices carrées d'ordre n et du type Poly=ARRAY[0..n]of REAL qui sert à définir les polynômes.

II.1. Écrire la procédure Produit_Mat(A,B:Mat;VAR C:Mat) qui renvoie dans C le produit des matrices A et B.

II.2. Écrire la fonction Trace_Mat(A:Mat):REAL qui renvoie la trace.

II.3. Écrire la procédure Pol_Car(A:Mat;VAR P:Poly) qui étant donné une matrice A renvoie dans P son polynôme caractéristique, en utilisant les résultats du 1 et les procédures Trace_Mat et Produit_Mat.

II.4. Combien d'additions et de multiplications sont nécessaires pour obtenir le polynôme caractéristique de la matrice carrée d'ordre n, A, lorsque l'on utilise la procédure Pol_Car ?

III. Application

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, B_3, le polynôme caractéristique de A et l'inverse de A quand

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$